Flächen mit einer Schar geodätischer Krümmungslinien und Flächen mit einer Schar kongruenter Krümmungslinien

---

Inaugural-Dissertation

verfaßt und der

Hohen Philosophischen Fakultät

der Julius-Maximilians-Universität Würzburg

zur Erlangung der Doktorwürde

vorgelegt am 8. Mai 1936 von

Maria Knoll

aus Nürnberg

1938

C. H. Beck'sche Buchdruckerei Nördlingen

Referent: Prof. Dr. O. Volk

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Meinem lieben Vater
in Dankbarkeit gewidmet

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549822_0252

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 7

I. Teil

Flächen mit einer Schar kongruenter Krümmungslinien . . 9

II. Teil

§ 1. Ableitung der Funktionalgleichung 15

§ 2. Behandlung der Funktionalgleichung 18

Einleitung

Die vorliegende Arbeit behandelt im 1. Teil Flächen mit einer Schar geodätischer Krümmungslinien. Es zeigt sich, daß die einzigen Flächen mit einer Schar geodätischer Krümmungslinien die von Monge gefundenen allgemeinen Gesimsflächen sind. Monge fand diese als diejenigen Flächen, deren eine Schale ihrer Krümmungsmittelpunktsfläche eine abwickelbare Fläche ist.[1]

Im 2. Teil der vorliegenden Arbeit werden alle Flächen mit einer Schar kongruenter Krümmungslinien gesucht. Dasselbe Problem behandelte Hazzidakis[2] folgendermaßen: Da die gesuchten Flächen durch Bewegung einer Kurve erzeugt werden können, sind die Koordinaten der Flächenpunkte Funktionen der Zeit t und der Bogenlänge s der bewegten Kurve. Die Bedingung, daß die Kurve in jeder Lage Krümmungslinie ist, führt auf eine Funktionalgleichung der Form:

$$\sum_{1}^{6} {}_r S_r(s)\, T_r(t) = 0.$$

Dabei sind S und T verwickelte Funktionen von s und t. Diese Gleichung zerspaltet Hazzidakis in i lineare homogene Gleichungen mit konstanten Koeffizienten zwischen den T und in $(6 - i)$ ähnliche zwischen den S. Er erhält auf diese Weise die gleichen Flächen wie wir im 2. Teil dieser Arbeit mit Ausnahme derjenigen Flächen, die durch beliebige Verschraubung einer Kreisevolvente um eine Achse entstehen, welche senkrecht auf der Kurvenebene steht und durch den Mittelpunkt des Kreises geht. Doch hätte Hazzidakis auch diese Flächen erhalten, wenn er im Fall der ebenen Krümmungslinien[3] bei $i = 5$ den Unterfall $p = q = 0$ berücksichtigt hätte. Trotz dieses Versehens hat aber Hazzidakis alle Flächen der gesuchten Art angegeben; denn die

---

[1] R. v. Lilienthal, *Besondere Flächen*, Enzykl. d. math. Wiss. III D 5, Leipzig 1902, Seite 296–97.

[2] J.N. Hazzidakis, *Flächenerzeugung durch Krümmungslinien*, J. f. reine u. ang. Math. **98**, 1885, Seite 49–67.

[3] Hazzidakis Seite 60–65; siehe Anm. 2 auf Seite 8.

Flächen, die durch Verschraubung einer Kreisevolvente entstehen, haben eine Schar von Krümmungslinien in parallelen Ebenen, und die einzigen Flächen mit einer Schar Krümmungslinien in parallelen Ebenen sind die Gesimsflächen.[1] Die Flächen, die durch Verschraubung einer Kreisevolvente entstehen, haben demnach auch als 2. Schar der Krümmungslinien kongruente ebene Kurven und können auch durch Abrollen einer Ebene, auf der eine beliebige Kurve eingezeichnet ist, auf einem Kreiszylinder erzeugt werden.

Außer Hazzidakis haben sich auch Bricard[2] und Demoulin[3] mit den Flächen mit einer Schar kongruenter Krümmungslinien beschäftigt. Beide gingen davon aus, daß die Tangenten der Evoluten der bewegten Kurve einem linearen Komplex angehören. Doch sind in dem Aufsatz von Bricard[2] außer den allgemeinen Schraubenflächen und den Gesimsflächen nur noch die Flächen erwähnt, die durch Verschraubung der Kreisevolvente entstehen. Demoulin[3] bemerkt noch, daß der Fall, daß die Kurve ein Kreis ist, gesondert behandelt werden muß. Das würde die Flächen liefern, die bei uns unter 1 S. 34 angeführt sind. Die Flächen, die unter 3 und 4 angeführt sind, werden aber auch von ihm nicht erwähnt.

---

[1] Lilienthal Seite 298; siehe Anm. 1 auf Seite 7.

[2] M. R. Bricard, *Détermination des surfaces ayant un système de lignes de courbure égales*, C. R. Ac. sc. Paris, **130**, 1900, Seite 475.

[3] M. A. Demoulin, *Sur les surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont égales*, C. R. Ac. sc. Paris, **130**, 1900, Seite 823.

I. Teil

Flächen mit einer Schar geodätischer Krümmungslinien

Eine Fläche kann gegeben werden durch die Parameterdarstellung:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u, v). \tag{1}$$

Für die Fundamentalgrößen 1. Ordnung wählen wir die Bezeichnungen e, f, g, für die Fundamentalgrößen 2. Ordnung E, F, G. Die Flächen können dann in der Form (1) bestimmt werden, indem man folgende 3 Vektordifferentialgleichungen auflöst:

$$(2) \quad \begin{cases} \text{a)} & \mathfrak{r}_{uu} = E\mathfrak{n} + \left\{\begin{matrix}11\\1\end{matrix}\right\}\mathfrak{r}_u + \left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\mathfrak{r}_v \\ \text{b)} & \mathfrak{r}_{uv} = F\mathfrak{n} + \left\{\begin{matrix}12\\1\end{matrix}\right\}\mathfrak{r}_u + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\mathfrak{r}_v \\ \text{c)} & \mathfrak{r}_{vv} = G\mathfrak{n} + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}\mathfrak{r}_u + \left\{\begin{matrix}22\\2\end{matrix}\right\}\mathfrak{r}_v. \end{cases}$$

Hierbei bedeutet $\mathfrak{n}$ die Flächennormale und die $\left\{\begin{matrix}ik\\1\end{matrix}\right\}$ sind die sog. Christoffel'schen Symbole 2. Art.

Wenn wir verabreden, daß die Parameterkurven $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ von den Krümmungslinien gebildet werden, dann muß sein:

$$f = F = 0. \tag{3}$$

Sollen die Kurven $v = \text{const.}$ außerdem geodätisch sein, dann gilt:

$$e_v = 0; \tag{4}$$

also:

$$e = e(u).$$

Da e nur von u abhängt, können wir die Normierung so wählen, daß:

$$e = 1. \tag{5}$$

Mittels (3) und (5) gehen die Gleichungen (2) über in:

$$(6)\qquad \begin{cases} \text{a)} & \mathfrak{r}_{uu} = E\mathfrak{n} \\ \text{b)} & \mathfrak{r}_{uv} = \dfrac{g_u}{2g}\mathfrak{r}_v \\ \text{c)} & \mathfrak{r}_{vv} = G\mathfrak{n} - \dfrac{g_u}{2}\mathfrak{r}_u + \dfrac{g_v}{2g}\mathfrak{r}_v. \end{cases}$$

Ferner wird:

$$(7)\qquad E = \frac{|\mathfrak{r}_{uu}\,\mathfrak{r}_u\,\mathfrak{r}_v|}{\sqrt{g}}.$$

Differenzieren wir (7) nach v, so erhalten wir:

$$E_v = \frac{|\mathfrak{r}_{uuv}\,\mathfrak{r}_u\,\mathfrak{r}_v|}{\sqrt{g}} + \frac{|\mathfrak{r}_{uu}\,\mathfrak{r}_{uv}\,\mathfrak{r}_v|}{\sqrt{g}} + \frac{|\mathfrak{r}_{uu}\,\mathfrak{r}_u\,\mathfrak{r}_{vv}|}{\sqrt{g}} - \frac{g_v}{2(\sqrt{g})^3}|\mathfrak{r}_{uu}\,\mathfrak{r}_u\,\mathfrak{r}_v|.$$

Setzen wir in diese Gleichung die Gleichungen (6) ein und berechnen aus (6b) durch Differentiation nach u:

$$\mathfrak{r}_{uvu} = \mathfrak{r}_{uuv} = \left(\frac{g_u}{2g}\right)_u \mathfrak{r}_v + \frac{g_u}{2g}\mathfrak{r}_{uv} = \left\{\left(\frac{g_u}{2g}\right)_u + \left(\frac{g_u}{2g}\right)^2\right\}\mathfrak{r}_v,$$

so erhalten wir:

$$E_v = 0;$$

somit:

$$E = E(u).$$

E ist also eine Funktion von u allein. Da u die Bogenlänge der Kurven $v = \text{const.}$ ist, folgt aus den Frenet'schen Formeln:

$$(8)\qquad \mathfrak{r}_{uu} = \frac{\mathfrak{h}}{\rho}.$$

Hier bedeutet $\mathfrak{h}$ die Hauptnormale und ρ den Krümmungsradius der Kurven $v = \text{const.}$

Ein Vergleich von (8) mit (6a) ergibt:

$$E = \frac{1}{\rho}.$$

Mit E ist also auch der Krümmungsradius ρ der Kurven $v = \text{const.}$ nur von deren Bogenlänge u abhängig.

Indem wir ferner

$$\mathfrak{r}_{uu} = E\,\mathfrak{n} = \frac{E}{\sqrt{g}}\,(\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v)$$

differenzieren, erhalten wir:

$$\mathfrak{r}_{uuu} = \left(\frac{E}{\sqrt{g}}\right)_u (\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_v) + \frac{E}{\sqrt{g}}\,(\mathfrak{r}_{uu} \times \mathfrak{r}_v) + \frac{E}{\sqrt{g}}\,(\mathfrak{r}_u \times \mathfrak{r}_{uv}).$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (6) wird dann das Produkt

$$|\,\mathfrak{r}_{uuu}\,\mathfrak{r}_{uu}\,\mathfrak{r}_u\,|$$

identisch Null. Das besagt, daß die Kurven $v = \text{const.}$ ebene Kurven sind. Da sie außerdem einen Krümmungsradius haben, der nur von ihrer Bogenlänge u abhängt, sind sie notwendig kongruente Kurven. Wir können deshalb für unsere Flächendarstellung (1) folgende Form annehmen:

$$\mathfrak{r} = \xi(u)\,\mathfrak{B}_1(v) + \eta(u)\,\mathfrak{B}_2(v) + \mathfrak{B}_3(v). \tag{9}$$

Hier sollen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ Einheitsvektoren sein, die aufeinander senkrecht stehen und die Ebenen $v = \text{const.}$ ausspannen. Wir können uns unsere Flächen durch Bewegung einer ebenen Kurve erzeugt denken.

Da u die Bogenlänge der Kurven $v = \text{const.}$ sein soll, muß sein:[1]

$$\xi'^2 + \eta'^2 = 1.$$

Damit die Kurven $v = \text{const.}$ geodätische Krümmungslinien sind, ist noch notwendig, daß

$$f = F = 0.$$

Aus Gleichung (9) folgt:

$$f = \xi'\{(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3') + \eta(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2')\} + \eta'\{(\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3') + \xi(\mathfrak{B}_1'\mathfrak{B}_2)\} = 0. \tag{10}$$

Bei der Behandlung der Gleichung (10) haben wir 3 Fälle zu unterscheiden:

I. $$(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2') \neq 0.$$

---

[1] Die Striche bedeuten im folgenden Differentiationen nach u, bzw. v.

Dann ist auch

$$(\mathfrak{B}_1'\mathfrak{B}_2) \neq 0;$$

denn aus

$$(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2) = 0$$

folgt:

$$(\mathfrak{B}_1'\mathfrak{B}_2) = -(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2').$$

Nachdem wir Gleichung (10) umgeformt haben zu:

$$\frac{(\mathfrak{B}_1'\mathfrak{B}_2)\,\xi'}{(\mathfrak{B}_1'\mathfrak{B}_2)\,\xi + (\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3')} = \frac{(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2')\,\eta'}{(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2')\,\eta + (\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3')},$$

erhalten wir hieraus durch Integration:

$$(\mathfrak{B}_1'\mathfrak{B}_2)\,\xi + (\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3') = V(v)\,\{(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2')\,\eta + (\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3')\}$$

also:

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma = 0, \tag{11}$$

wobei α, β, γ nur von v abhängen. Die Kurven $v = \text{const.}$ sind somit Gerade. Gerade sind immer geodätisch. Die einzigen Flächen, welche eine Schar von geradlinigen Krümmungslinien haben, sind die abwickelbaren Flächen. Die weitere Behandlung dieses Falles würde uns also nur auf die abwickelbaren Flächen führen.

II. $$(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2') = 0.$$

Dann ist auch

$$(\mathfrak{B}_1'\mathfrak{B}_2) = 0.$$

Aus (10) folgt durch Integration:

$$\xi\,(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3') + \eta\,(\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3') = V(v).$$

Falls $(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3')$ und $(\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3')$ nicht beide gleichzeitig Null sind, gelangt man wieder zu obigem Ergebnis: die Kurven $v = \text{const.}$ sind Gerade.

Die Kurven $v = \text{const.}$ sind möglicherweise keine Geraden, wenn

III. neben

$$(\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2') = 0;\ (\mathfrak{B}_1'\mathfrak{B}_2) = 0$$

auch die Gleichungen:

$$(\mathfrak{V}_1\mathfrak{V}_3') = 0;\ (\mathfrak{V}_2\mathfrak{V}_3') = 0$$

erfüllt sind.

Das ist dann und dann nur dann der Fall, wenn:

$$\mathfrak{V}_1' = \alpha\,(\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2)$$
$$\mathfrak{V}_2' = \beta\,(\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2)$$
$$\mathfrak{V}_3' = \gamma\,(\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2),$$

wobei α, β, γ Funktionen von v sind.

Nun wollen wir

$$\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{t}\,(v)$$

als den Tangentenvektor einer Raumkurve ansehen, die v zur Bogenlänge haben soll. Dann ist nach der 2. Frenet'schen Formel:

$$\mathfrak{V}_1' = \frac{\mathfrak{h}}{\rho} = \alpha(\mathfrak{V}_1 \times \mathfrak{V}_2) = \alpha(\mathfrak{t} \times \mathfrak{V}_2).$$

Wird diese Gleichung vektoriell mit $\mathfrak{t}$ multipliziert, so ergibt sich:

$$\frac{\mathfrak{t} \times \mathfrak{h}}{\rho} = \alpha\,(\mathfrak{t} \times (\mathfrak{t} \times \mathfrak{V}_2)) = \alpha\left\{\mathfrak{t}\,(\mathfrak{t}\,\mathfrak{V}_2) - \mathfrak{V}_2\mathfrak{t}^2\right\} = -\alpha\,\mathfrak{V}_2.$$

$\mathfrak{V}_2$ ist also Einheitsvektor in der Binormalenrichtung. Wir setzen deshalb:

$$\mathfrak{V}_2 = \mathfrak{b}.$$

Dann wird ferner:

$$\alpha = -\frac{1}{\rho}.$$

Diese Beziehungen stehen im Einklang mit den weiteren Bedingungen:

$$\mathfrak{b}' = -\frac{\mathfrak{h}}{\tau}$$

$$\mathfrak{V}_2' = \beta\,(\mathfrak{t} \times \mathfrak{b}).$$

Diese beiden Gleichungen sind die gleichen, wenn wir setzen:

$$\beta = \frac{1}{\tau}.$$

$\frac{1}{\tau}$ bedeutet die Windung der Raumkurve.

$\mathfrak{B}_3'$ läßt sich jetzt folgendermaßen darstellen:

$$\mathfrak{B}_3' = \gamma(\mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2) = \gamma(\mathfrak{t} \times \mathfrak{b}) = -\gamma\mathfrak{h} = -\rho\gamma\mathfrak{t}'.$$

Durch Integration erhalten wir:

$$\mathfrak{B}_3 = -\int_{v_0}^{v} \rho\gamma\mathfrak{t}'\,dv = -\rho\gamma\mathfrak{t} + \int_{v_0}^{v} (\rho\gamma)_v \mathfrak{t}\,dv.$$

Nun ist:

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(v) = \int_{v_0}^{v} (\rho\gamma)_v \mathfrak{t}\,dv$$

eine Raumkurve, die den Tangentenvektor $\mathfrak{t} = \mathfrak{B}_1$ besitzt. Wenn wir verlangen, daß v ihre Bogenlänge ist, muß sein:

$$(\rho\gamma)_v = 1,$$
$$\rho\gamma = v.$$

Wir erhalten deshalb

$$\mathfrak{B}_3 = \mathfrak{y} - v\mathfrak{t}.$$

Unsere Flächengleichung (9) wird jetzt:

$$\boxed{\mathfrak{r} = \mathfrak{y}(v) + \mathfrak{t}(v)\{\xi(u) - v\} + \mathfrak{b}(v)\,\eta(u)} \tag{12}$$

Hier ist v die Bogenlänge der Kurve $\mathfrak{r} = \mathfrak{y}(v)$
$\mathfrak{t}$ der Tangentenvektor der Kurve $\mathfrak{r} = \mathfrak{y}(v)$
$\mathfrak{b}$ der Binormalenvektor der Kurve $\mathfrak{r} = \mathfrak{y}(v)$
u die Bogenlänge der Kurven $v = \text{const.}$
ξ und η sind beliebige Funktionen von u.

Unsere Flächengleichung (12) erfüllt von selbst die Bedingung

$$F = 0,$$

so daß alle notwendigen Bedingungen dafür erfüllt sind, daß die Kurven $u = \text{const.}$ Krümmungslinien und $v = \text{const.}$ geodätische Krümmungslinien sind.

Die Flächendarstellung (12) besagt nun folgendes: Die Kurven $v = \text{const.}$ sind kongruente ebene Kurven und liegen in der

Schar der rektifizierenden Ebenen der Raumkurve $\mathfrak{y}(v)$. Die Kurven $u = \text{const}$ sind Orthogonaltrajektorien der rektifizierenden Ebenen. Unter ihnen befinden sich für $\eta = 0$ Filarevolventen der Kurve $\mathfrak{y}(v)$. Wenn η identisch Null ist, erhalten wir aus (12) die Darstellung der abwickelbaren Flächen, zu denen uns der I. und II. Fall führte.

Unser Problem wird geometrisch auf folgende Weise gelöst: Wir wählen eine beliebige Kurve $\xi = \xi(u)$, $\eta = \eta(u)$ (mit der Bogenlänge u als Parameter). Dann wählen wir eine beliebige Raumkurve $\mathfrak{y} = \mathfrak{y}(v)$ (mit der Bogenlänge v als Parameter). Die Röhrenfläche der Orthogonaltrajektorien zu den rektifizierenden Ebenen der Raumkurve, deren Querschnitt stets die ebene Kurve $\xi(u)$, $\eta(u)$ ist, ist unsere gesuchte Fläche.

II. Teil

Flächen mit einer Schar kongruenter Krümmungslinien

§ 1. Ableitung der Bedingungsgleichung.

Wir nehmen an, die Kurven $v = \text{const}$. seien kongruente Krümmungslinien. Unsere Flächen lassen sich dann folgendermaßen darstellen:

$$\text{(1)} \qquad \mathfrak{r} = \mathfrak{V}_1(v)\, X_1(u) + \mathfrak{V}_2(v)\, X_2(u) + \mathfrak{V}_3(v)\, X_3(u) + \mathfrak{V}_4(v).$$

Hier ist u die Bogenlänge der Kurven $v = \text{const}$; $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$, $\mathfrak{V}_3$ sind Einheitsvektoren, die aufeinander senkrecht stehen und ein Rechtssystem bilden.

Unsere Fläche entsteht durch Bewegung einer Kurve $v = v_0 = \text{const}$. Mit dieser Kurve fest verbunden ist das Koordinatensystem, dessen Achsen $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$, $\mathfrak{V}_3$ sind und dessen Koordinatenursprung $0'$ ist, wobei $0'$ festgelegt ist durch den Ortsvektor

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{V}_4(v).$$

Aus (1) erhält man durch Differentiation nach v

$$\text{(2)} \qquad \mathfrak{r}_v = \mathfrak{V}_1' X_1 + \mathfrak{V}_2' X_2 + \mathfrak{V}_3' X_3 + \mathfrak{V}_4'.$$

Nun setzen wir:

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{V}_1 X_1 + \mathfrak{V}_2 X_2 + \mathfrak{V}_3 X_3. \tag{3}$$

Da sich jede Bewegung zusammensetzt aus infinitesimalen Rotationen und Translationen, oder was dasselbe ist: aus infinitesimalen Schraubungen, können wir für (2) setzen:

$$\mathfrak{r}_v = \mathfrak{S} \times \mathfrak{y} + \mathfrak{V}_4' \tag{4}$$

oder:

$$\mathfrak{r}_v = \mathfrak{S} \times (\mathfrak{y} - \mathfrak{z}) + a\mathfrak{S}. \tag{5}$$

Hier bedeutet $\mathfrak{S}$ die Richtung der jeweiligen Schraubenachse, $\mathfrak{z}$ den Ortsvektor, durch den die Schraubenachse geht und a die Verschraubung. $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{z}$ und a sind nur von v abhängig.

$\mathfrak{z}$ nehmen wir immer senkrecht zu $\mathfrak{S}$ an. Von reinen Translationsbewegungen, wo $\mathfrak{S} \equiv 0$, wollen wir absehen, da diese nur Zylinderflächen liefern. Dann können wir bei geeigneter Normierung $\mathfrak{S}$ als Einheitsvektor annehmen.

Durch Vergleich von (2) mit (4) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathfrak{V}_1' &= \mathfrak{S} \times \mathfrak{V}_1 \\ \mathfrak{V}_2' &= \mathfrak{S} \times \mathfrak{V}_2 \\ \mathfrak{V}_3' &= \mathfrak{S} \times \mathfrak{V}_3. \end{aligned} \tag{6}$$

Durch Vergleich von (4) mit (5) erhält man:

$$\mathfrak{V}_4' = -(\mathfrak{S} \times \mathfrak{z}) + a\mathfrak{S}. \tag{7}$$

Da die Kurven $v = \text{const.}$ Krümmungslinien auf der erzeugten Fläche sind, umhüllen die Flächennormalen längs dieser Kurven je eine Evolute dieser Krümmungslinie. Die Flächennormale $\mathfrak{n}$ läßt sich also folgendermaßen darstellen:

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{h} \sin \varphi + \mathfrak{b} \cos \varphi, \tag{8}$$

wobei

$$\varphi = \int_{u_0}^{u} \frac{du}{\tau} + V(v). \tag{9}$$

Hier bedeutet $\mathfrak{h}$ die Hauptnormale, $\mathfrak{b}$ die Binormale und $\frac{1}{\tau}$ die Windung der Kurve $\mathfrak{R} = \mathfrak{y}$. Die Funktion $V(v)$ besagt, daß die Einhüllende der Flächennormalen von v abhängen kann.

Setzen wir (8) in die Gleichung

$$\mathfrak{r}_u \mathfrak{n} = 0 \tag{10}$$

ein, so ist diese erfüllt, da ja:

$$\mathfrak{r}_u = \mathfrak{t},$$

wobei $\mathfrak{t}$ die Tangente der Kurve $\mathfrak{R} = \mathfrak{y}$ ist. Setzen wir (8) in die Gleichung

$$\mathfrak{r}_v \mathfrak{n} = 0 \tag{11}$$

ein, so erhält man unter Berücksichtigung der Gleichungen (4) bzw. (5)

$$|\mathfrak{S}\mathfrak{y}\mathfrak{h}| \sin\varphi + |\mathfrak{S}\mathfrak{y}\mathfrak{b}| \cos\varphi + (\mathfrak{V}_4'\mathfrak{h}) \sin\varphi + (\mathfrak{V}_4'\mathfrak{b}) \cos\varphi = 0. \tag{12a}$$

bzw.

$$|\mathfrak{S}, \mathfrak{y} - \mathfrak{z}, \mathfrak{h}| \sin\varphi + |\mathfrak{S}, \mathfrak{y} - \mathfrak{z}, \mathfrak{b}| \cos\varphi + a(\mathfrak{S}\mathfrak{h}) \sin\varphi + a(\mathfrak{S}\mathfrak{b}) \cos\varphi = 0. \tag{12b}$$

Wir gehen nun von Gleichung (12b) aus. Um den Vektor $\mathfrak{z}$ zu eliminieren, differenzieren wir (12b) nacheinander zweimal nach n und erhalten dadurch die zwei folgenden Gleichungen:

$$-|\mathfrak{S}, \mathfrak{y} - \mathfrak{z}, \mathfrak{t}| \frac{\sin\varphi}{\rho} + (\mathfrak{S}\mathfrak{b}) \sin\varphi - (\mathfrak{S}\mathfrak{h}) \cos\varphi - a(\mathfrak{S}\mathfrak{t}) \frac{\sin\varphi}{\rho} = 0. \tag{13}$$

$$|\mathfrak{S}, \mathfrak{y} - \mathfrak{z}, \mathfrak{h}| \frac{\sin\varphi}{\rho^2} + |\mathfrak{S}, \mathfrak{y} - \mathfrak{z}, \mathfrak{t}| \frac{\cos\varphi}{\tau\rho} - |\mathfrak{S}, \mathfrak{y} - \mathfrak{z}, \mathfrak{t}| \sin\varphi \frac{\rho'}{\rho^2} - (\mathfrak{S}\mathfrak{t}) \frac{\cos\varphi}{\rho} + a(\mathfrak{S}\mathfrak{h}) \frac{\sin\varphi}{\rho^2} + a(\mathfrak{S}\mathfrak{t}) \left(\frac{\cos\varphi}{\rho\tau} - \frac{\sin\varphi}{\rho^2} \rho' \right) = 0. \tag{14}$$

Zu den Gleichungen (12b), (13) und (14) nehmen wir jetzt noch folgende Identität hinzu

$$|\mathfrak{S}, \mathfrak{y} - \mathfrak{z}, \mathfrak{t}| (\mathfrak{S}\mathfrak{t}) + |\mathfrak{S}, \mathfrak{y} - \mathfrak{z}, \mathfrak{h}| (\mathfrak{S}\mathfrak{h}) + |\mathfrak{S}, \mathfrak{y} - \mathfrak{z}, \mathfrak{b}| (\mathfrak{S}\mathfrak{b}) = 0. \tag{15}$$

Diese erhält man, wenn man:

$$\mathfrak{S}\times(\mathfrak{y}-\mathfrak{z}) = |\mathfrak{S}, \mathfrak{y}-\mathfrak{z}, \mathfrak{t}|\mathfrak{t} + |\mathfrak{S}, \mathfrak{y}-\mathfrak{z}, \mathfrak{h}|\mathfrak{h} + |\mathfrak{S}, \mathfrak{y}-\mathfrak{z}, \mathfrak{b}|\mathfrak{b}$$

in die Identität:

$$(\mathfrak{S}\times(\mathfrak{y}-\mathfrak{z}))\,\mathfrak{S} = 0$$

einsetzt.

Nun betrachten wir (12b) — (15) als 4 Gleichungen für die 3 Unbekannten:

$$|\mathfrak{S}, \mathfrak{y}-\mathfrak{z}, \mathfrak{t}|,\ |\mathfrak{S}, \mathfrak{y}-\mathfrak{z}, \mathfrak{h}|,\ |\mathfrak{S}, \mathfrak{y}-\mathfrak{z}, \mathfrak{b}|$$

und bilden die Koeffizientendeterminante. Diese muß Null sein. Die Rechnung ergibt:

$$\frac{a\sin^2\varphi\cos\varphi}{\rho^3} - (\mathfrak{S}\mathfrak{h}\cos\varphi - \mathfrak{S}\mathfrak{b}\sin\varphi)^2\left(\frac{\cos\varphi}{\tau\rho} - \frac{\rho'\sin\varphi}{\rho^2}\right) = 0.$$

In dieser Gleichung kommt $\mathfrak{z}$ nicht mehr vor.

Der Fall

$$\frac{1}{\rho} = 0$$

gibt die geradlinigen Krümmungslinien und führt auf die abwickelbaren Flächen. Wenn wir davon absehen, können wir unsere Funktionalgleichung mit ρ^3 multiplizieren und erhalten:

$$(16)\quad a\sin^2\varphi\cos\varphi - (\mathfrak{S}\mathfrak{h}\cos\varphi - \mathfrak{S}\mathfrak{b}\sin\varphi)^2\left(\frac{\rho^2\cos\varphi}{\tau} - \rho\rho'\sin\varphi\right) = 0.$$

§ 2. Behandlung der Funktionalgleichung (16).

Der Fall:

$$\cos\varphi = 0$$

würde auf die Flächen mit einer Schar geodätischer Krümmungslinien führen, die bereits im 1. Teil behandelt wurden. In diesem Fall fällt nämlich, wie man aus (8) erkennt, die Flächennormale stets zusammen mit der Hauptnormale der Kurve $v = v_0$.

Für

$$\sin\varphi = 0$$

würde die Flächennormale stets mit der Binormale der Kurven $v = \text{const.}$ zusammenfallen. Das besagt, daß die Kurven $v = \text{const.}$

Haupttangentenkurven sind. Die einzigen Flächen, auf welchen die Krümmungslinien gleichzeitig Haupttangentenkurven sind, sind die abwickelbaren Flächen, von denen wir absehen wollen.

Wir setzen deshalb bei der Behandlung der Gleichung (16) voraus, daß

$$\cos\varphi \neq 0$$
$$\sin\varphi \neq 0,$$

und unterscheiden folgende Fälle:

I. $$a = 0.$$

In diesem Fall setzt sich die Bewegung der Kurve $v = v_0$ aus lauter infinitesimalen Rotationen zusammen. Gleichung (16) wird hier:

$$(17) \qquad (\mathfrak{S}\mathfrak{h}\cos\varphi - \mathfrak{S}\mathfrak{b}\sin\varphi)^2\left(\frac{\rho^2\cos\varphi}{\tau} - \rho\rho'\sin\varphi\right) = 0.$$

Diese Gleichung zerfällt in:

$$(17a) \qquad \mathfrak{S}\mathfrak{h}\cos\varphi - \mathfrak{S}\mathfrak{b}\sin\varphi = 0;$$

und:

$$(17b) \qquad \frac{\rho^2\cos\varphi}{\tau} - \rho\rho'\sin\varphi = 0.$$

Wenn man (17a) zweimal nach u differenziert, erhält man:

$$-\frac{\mathfrak{S}\mathfrak{t}}{\rho}\cos\varphi = 0$$
$$-\frac{\mathfrak{S}\mathfrak{h}}{\rho^2}\cos\varphi + \frac{\mathfrak{S}\mathfrak{t}}{\rho}\left(\frac{\sin\varphi}{\tau} + \frac{\rho'\cos\varphi}{\rho}\right) = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen und Gleichung (17a) erhält man:

$$\mathfrak{S}\mathfrak{t} = \mathfrak{S}\mathfrak{h} = \mathfrak{S}\mathfrak{b} = 0$$

und deshalb

$$\mathfrak{S} = 0.$$

Von diesem Fall haben wir aber gleich am Anfang abgesehen.

Die Gleichung (17b) ist erfüllt, wenn:

$$(18) \qquad \rho' = \frac{\rho\,\mathrm{ctg}\,\varphi}{\tau}$$

oder im Besonderen

$$\rho' = \frac{1}{\tau} = 0. \tag{19}$$

In beiden Fällen haben wir sphärische Kurven. In dem Fall, daß die Beziehungen (19) erfüllt sind, sind die Kurven $v = \text{const.}$ Kreise, im Fall, daß die Beziehung (18) gilt, sphärische Raumkurven. In diesem letzten Fall muß, wie man aus (18) erkennt, φ von v unabhängig sein; das besagt, daß die Einhüllende der Flächennormalen von v unabhängig sind. Die erzeugte Fläche ist eine Kugel.

Im Fall, daß die Beziehungen (19) gelten, also ein Kreis vorliegt, nehmen wir an, die Normale der Kreisebene sei stets parallel $\mathfrak{T}(v)$. $\mathfrak{T}(v)$ soll Tangentenvektor einer Kurve $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(v)$ mit der Bogenlänge v sein. Die Hauptnormale dieser Kurve bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}$, die Binormale mit $\mathfrak{B}$, die Krümmung mit $\frac{1}{R}$ und die Windung mit $\frac{1}{T}$. Unsere Fläche, die durch Bewegung der Kreisebene entsteht, läßt sich dann folgendermaßen darstellen

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{H} r \cos\frac{u}{r} + \mathfrak{B} r \sin\frac{u}{r} + \mathfrak{B}_4. \tag{20}$$

Unter Benützung der Frenet'schen Formeln erhält man aus (20) durch Differentiation nach v

$$\mathfrak{x}_v = -\frac{\mathfrak{T}}{R} r \cos\frac{u}{r} - \frac{\mathfrak{H}}{T} r \sin\frac{u}{r} + \frac{\mathfrak{B}}{T} r \cos\frac{u}{r} + \mathfrak{B}_4'. \tag{21}$$

Ferner erhält man aus (20)

$$\begin{cases} \mathfrak{h} = -\mathfrak{H} \cos\dfrac{u}{r} - \mathfrak{B} \sin\dfrac{u}{r} \\ \mathfrak{b} = \mathfrak{T}. \end{cases} \tag{22}$$

Damit jetzt die Kurven $v = \text{const.}$ Krümmungslinien sind, muß die Flächennormale nach Gleichung (8) und (22) folgende Form haben:

$$\mathfrak{n} = \left(-\mathfrak{H} \cos\frac{u}{r} - \mathfrak{B} \sin\frac{u}{r}\right) \sin\varphi + \mathfrak{T} \cos\varphi. \tag{23}$$

Setzen wir jetzt Gleichung (21) und (23) in Gleichung (11) ein, so erhalten wir:

$$\frac{-r}{R}\cos\frac{u}{r}\cos\varphi-(\mathfrak{V}_4'\mathfrak{H})\cos\frac{u}{r}\sin\varphi-(\mathfrak{V}_4'\mathfrak{B})\sin\frac{u}{r}\sin\varphi+ \tag{24}$$
$$+(\mathfrak{V}_4'\mathfrak{T})\cos\varphi=0.$$

Damit nun Gleichung (24) für alle Werte von u erfüllt ist, müssen die Koeffizienten von $\cos\frac{u}{r}$, $\sin\frac{u}{r}$ und das von u freie Glied identisch Null sein. Hieraus folgt schließlich:

$$\mathfrak{V}_4'\,\mathfrak{T}=0;$$
$$\mathfrak{V}_4'\,\mathfrak{B}=0;$$
$$\mathfrak{V}_4'\,\mathfrak{H}=\frac{-r}{R}\operatorname{ctg}\varphi.$$

$\mathfrak{V}_4'$ ist also parallel $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{H}$ wiederum ist parallel $\mathfrak{T}'$. Wir setzen deshalb

$$\mathfrak{V}_4'=\Phi\,\mathfrak{T}'.$$

Hieraus erhält man durch partielle Integration:

$$\mathfrak{V}_4=\Phi\,\mathfrak{T}-\int_{v_0}^{v}\Phi_v\,\mathfrak{T}\,dv.$$

Da die Kurve $\mathfrak{r}=-\int_{v_0}^{v}\Phi_v\,\mathfrak{T}\,dv$ als Tangente ebenfalls den Vektor $\mathfrak{T}$ hat, können wir annehmen:

$$\mathfrak{R}=-\int_{v_0}^{v}\Phi_v\,\mathfrak{T}\,dv.$$

Da wir v als die Bogenlänge von $\mathfrak{R}$ annahmen, muß jetzt sein:

$$\Phi_v=-1$$
$$\Phi=C-v$$
$$\mathfrak{V}_4=(C-v)\,\mathfrak{T}+\mathfrak{R}.$$

Unsere Fläche läßt sich nun darstellen:

$$\boxed{\mathfrak{r}=\mathfrak{R}+(C-v)\,\mathfrak{T}+\mathfrak{H}\,r\cos\frac{u}{r}+\mathfrak{B}\,r\sin\frac{u}{r}} \tag{25}$$

Aus (25) erkennt man, daß der Kreismittelpunkt eine Evolvente der Kurve $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(v)$ beschreibt. Unsere Fläche kann erzeugt werden, wenn an einen Faden, der auf einer beliebigen Kurve $\mathfrak{R}(v)$ abgewickelt wird, ein Kreis in seinem Mittelpunkt derart befestigt ist, daß der Faden senkrecht auf der Kreisebene steht.

II. $$a \neq 0; \quad \frac{1}{\tau} = 0; \quad \varphi = V(v).$$

In diesem Fall erhalten wir aus Gleichung (16)

$$\sqrt{-\frac{a \sin V \cos V}{\rho \rho'}} = \mathfrak{S}\mathfrak{h} \cos V - \mathfrak{S}\mathfrak{b} \sin V. \tag{26}$$

Differenziert man (26) nach u, so erhält man:

$$\sqrt{-a \sin V \cos V}\, \frac{d}{du} \frac{1}{\sqrt{\rho \rho'}} = -\frac{\mathfrak{S}\mathfrak{t}}{\rho} \cos V$$

und hieraus:

$$\mathfrak{S}\mathfrak{t} = -\sqrt{-a \operatorname{tg} V}\, \rho \frac{d}{du} \frac{1}{\sqrt{\rho \rho'}}. \tag{27}$$

Durch nochmalige Differentiation erhält man aus (27):

$$\mathfrak{S}\mathfrak{h} = -\sqrt{-a \operatorname{tg} V}\, \rho \frac{d}{du} \left(\rho \frac{d}{du} \frac{1}{\sqrt{\rho \rho'}} \right). \tag{28}$$

Aus (28) und (26) berechnet man:

$$\mathfrak{S}\mathfrak{b} = -\sqrt{-a \operatorname{ctg} V} \left[\frac{1}{\sqrt{\rho \rho'}} + \rho \frac{d}{du} \left(\rho \frac{d}{du} \frac{1}{\sqrt{\rho \rho'}} \right) \right]. \tag{29}$$

Da wir $\mathfrak{S}$ als Einheitsvektor voraussetzten, ist:

$$\mathfrak{S}\mathfrak{t}^2 + \mathfrak{S}\mathfrak{h}^2 + \mathfrak{S}\mathfrak{b}^2 = 1.$$

Durch Einsetzen von (27), (28) und (29) in diese Beziehung erhält man:

$$\begin{aligned} &a \operatorname{tg} V \left[\left(\rho \frac{d}{du} \frac{1}{\sqrt{\rho \rho'}} \right)^2 + \left\{ \rho \frac{d}{du} \left(\rho \frac{d}{du} \frac{1}{\sqrt{\rho \rho'}} \right) \right\}^2 \right] \\ &+ a \operatorname{ctg} V \left[\frac{1}{\sqrt{\rho \rho'}} + \rho \frac{d}{du} \left(\rho \frac{d}{du} \frac{1}{\sqrt{\rho \rho'}} \right) \right]^2 = -1. \end{aligned} \tag{30}$$

Setzt man:

$$\left(\rho \frac{d}{du} \frac{1}{\sqrt{\rho \rho'}}\right)^2 + \left\{ \rho \frac{d}{du} \left(\rho \frac{d}{du} \frac{1}{\sqrt{\rho \rho'}} \right) \right\}^2 = U_1,$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\rho \rho'}} + \rho \frac{d}{du} \left(\rho \frac{d}{du} \frac{1}{\sqrt{\rho \rho'}} \right) \right)^2 = U_2,$$

so erhält man aus Gleichung (30) durch Differentiation nach u:

$$a \operatorname{tg} V \, U_1' + a \operatorname{ctg} V \, U_2' = 0. \tag{31}$$

Wenn U_1' und U_2' nicht beide gleichzeitig stets Null sind, erhält man aus (31)

$$V = \text{const.}$$

und dann schließlich aus (30)

$$a = \text{const.}$$

In diesem Fall würden die Flächennormalen stets ein und dieselbe Evolute der Kurve $v = v_0$ einhüllen und die Verschraubung wäre konstant. Diesen Fall wollen wir einstweilen zurückstellen und unter III mit behandeln.

Wir nehmen sodann an:

$$U_1' = U_2' = 0$$

$$\left(\rho \frac{d}{du} \frac{1}{\sqrt{\rho \rho'}}\right)^2 + \left\{ \rho \frac{d}{du} \left(\rho \frac{d}{du} \frac{1}{\sqrt{\rho \rho'}} \right) \right\} = c_1^2 \tag{32}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\rho \rho'}} + \rho \frac{d}{du} \left(\rho \frac{d}{du} \frac{1}{\sqrt{\rho \rho'}} \right) = c_2. \tag{33}$$

Hier bedeuten c_1 und c_2 Konstante.

Gleichung (30) wird jetzt:

$$a \operatorname{tg} V c_1^2 + a \operatorname{ctg} V c_2^2 = -1. \tag{34}$$

Wir haben nun 3 Fälle zu unterscheiden:

a) $$c_1 = 0; \quad c_2 \neq 0.$$

Aus (32) erhält man in diesem Fall:

$$\frac{d}{du} \left(\frac{1}{\sqrt{\rho \rho'}} \right) = 0.$$

Hieraus erhält man als natürliche Gleichung der Kurve $v = v_0$

$$\rho^2 = C_1 u + C_2.$$

Aus (27) und (28) erhalten wir jetzt:

$$\mathfrak{S}\mathfrak{t} = \mathfrak{S}\mathfrak{h} = 0.$$

Das besagt, daß $\mathfrak{S}$ stets parallel der Binormale der Kurve $v = v_0$ ist. Wir vereinbaren nun, daß diese stets mit der $\mathfrak{V}_3$-Achse zusammenfällt. Wir setzen deshalb

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{b} = \mathfrak{V}_3 = \mathfrak{C} \tag{35}$$

in Gleichung (12b) ein und erhalten:

$$+ (\mathfrak{y} - \mathfrak{z}, \mathfrak{t}) \sin V + a \cos V = 0$$

und hieraus:

$$(\mathfrak{y} - \mathfrak{z}, \mathfrak{t}) = - a \operatorname{ctg} V. \tag{36}$$

Aus (34) erhält man im Fall a)

$$a \operatorname{ctg} V = - \frac{1}{c_2^2}. \tag{37}$$

Ein Vergleich von (36) und (37) ergibt:

$$(\mathfrak{y} - \mathfrak{z}, \mathfrak{t}) = \frac{1}{c_2^2}. \tag{38}$$

Differenzieren wir Gleichung (38) im Koordinatensystem $0'$ $(\mathfrak{V}_1 \mathfrak{V}_2 \mathfrak{V}_3)$ nach v, so erhalten wir:

$$\mathfrak{z}_v \mathfrak{t} = 0.$$

Diese Gleichung nach u differenziert gibt:

$$\mathfrak{z}_v \frac{\mathfrak{y}}{\rho} = 0.$$

Aus den beiden letzten Beziehungen folgt:

$$\mathfrak{z}_v = \mathfrak{b} \Phi = \mathfrak{C} \Phi.$$

Durch Integration erhält man:

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{b} \int_{v_0}^{v} \Phi \, dv + \mathfrak{C}_1.$$

Da $\mathfrak{z}$ senkrecht $\mathfrak{S} = \mathfrak{b}$ angenommen wurde, muß $\mathfrak{z}$ also ein konstanter Vektor sein und wir dürfen

$$\mathfrak{z} = 0$$

setzen. Das besagt, daß die Schraubungsachse nicht nur ihrer Richtung, sondern auch ihrer Lage nach im Koordinatensystem $0'$ ($\mathfrak{V}_1\ \mathfrak{V}_2\ \mathfrak{V}_3$) und damit auch im Bezugssystem fest ist. Die Differentialgleichung für unsere Kurve $\mathfrak{y}$ wird jetzt:

$$\mathfrak{y}\mathfrak{y}' = \frac{1}{c_2^2}.$$

Das ist aber die Differentialgleichung für eine Kreisevolvente. Der Kreis hat seinen Mittelpunkt in $0'$ und der Kreisradius beträgt $\frac{1}{c_2^2}$.

Unsere Fläche entsteht durch beliebige Verschraubung einer Kreisevolvente um eine Achse, die senkrecht auf der Kurvenebene steht und durch den Mittelpunkt des Kreises geht.

Setzen wir

$$a = F'(v),$$

so läßt sich unsere Fläche folgendermaßen darstellen:

(39)
$$\boxed{\begin{aligned}\mathfrak{r} = {} & \mathfrak{C}_1(X_1 \cos v - X_2 \sin v) \\ & + \mathfrak{C}_2(X_1 \sin v + X_2 \cos v) + F(v)\mathfrak{C} + \mathfrak{C}_3.\end{aligned}}$$

Hier ist $\mathfrak{C}_1$ ein Einheitsvektor, der auf $\mathfrak{C}$ senkrecht steht. Ferner:

$$\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C} \times \mathfrak{C}_1$$

b)
$$c_2 = 0; \quad c_1 \neq 0.$$

In diesem Fall erhält man aus Gleichung (29)

(40)
$$\mathfrak{S}\mathfrak{b} = 0.$$

Das besagt, daß die Schraubungsachse stets parallel der Kurvenebene ist. Aus Gleichung (34) erhält man:

(41)
$$a \operatorname{tg} V = -\frac{1}{c_1^2}.$$

Setzt man (41) in die Gleichungen (27) und (28) ein und differenziert letztere nach v, so erhält man:

$$\mathfrak{S}'\mathfrak{t} = \mathfrak{S}'\mathfrak{h} = 0.$$

Wir erkennen, daß $\mathfrak{S}$ in der Kurvenebene eine feste Richtung hat. Wählen wir als diese feste Richtung die X_1-Achse, so dürfen wir setzen:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{V}_1 = \mathfrak{C} \tag{42}$$
$$\mathfrak{b} = \mathfrak{V}_3.$$

Setzen wir (42) in (12b) ein, so erhalten wir:

$$|\mathfrak{V}_1, \mathfrak{y} - \mathfrak{z}, \mathfrak{h}| \sin V + |\mathfrak{V}_1, \mathfrak{y} - \mathfrak{z}, \mathfrak{b}| \cos V + a(\mathfrak{V}_1\mathfrak{h}) \sin V = 0.$$

Nun dividieren wir diese Gleichung durch $\sin V$ und setzen für

$$\operatorname{ctg} v = -ac_1^2,$$

wie sich aus Gleichung (41) ergibt. Da $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{h}$ in der Kurvenebene liegen, ist ferner

$$|\mathfrak{V}_1\mathfrak{y}, \mathfrak{h}| = 0,$$

und wir erhalten nun aus obiger Gleichung:

$$-|\mathfrak{V}_1, \mathfrak{z}, \mathfrak{h}| - |\mathfrak{V}_1, \mathfrak{y}, \mathfrak{b}|ac_1^2 + |\mathfrak{V}_1, \mathfrak{z}, \mathfrak{b}|ac_1^2 + a\mathfrak{V}_1\mathfrak{h} = 0. \tag{43}$$

Da $\mathfrak{z}$ senkrecht $\mathfrak{S}$ angenommen wird, können wir setzen:

$$\mathfrak{z} = A_2\mathfrak{V}_2 + A_3\mathfrak{V}_3. \tag{44}$$

Hier sind A_2 und A_3 Skalare, die nur von v abhängig sind. (44) in (43) eingesetzt gibt:

$$A_3(\mathfrak{V}_2\mathfrak{h}) - ac_1^2(\mathfrak{V}_2\mathfrak{y}) + A_2ac_1^2 + a(\mathfrak{V}_1\mathfrak{h}) = 0. \tag{45}$$

Durch Differentiation von (45) nach u erhält man:

$$-A_3\frac{(\mathfrak{V}_2\mathfrak{t})}{\rho} - ac_1^2(\mathfrak{V}_2\mathfrak{t}) + a\frac{(\mathfrak{V}_1\mathfrak{t})}{\rho} = 0.$$

Hieraus erhält man:

$$A_3 = a\left[-\frac{\mathfrak{V}_1\mathfrak{t}}{\mathfrak{V}_2\mathfrak{t}} - \rho c_1^2\right].$$

In der eckigen Klammer steht eine Funktion von u allein. Da A_3 nur von v abhängt, muß das eine Konstante sein. Wir setzen deshalb:

$$A_3 = a\,C. \tag{46}$$

Setzen wir (46) in (45) ein, so können wir A_2 berechnen:

$$A_2 = \frac{-C\,(\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{h}) + c_1^2\,(\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{y}) - (\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{h})}{c_1^2}.$$

$A_2(v)$ muß also eine Konstante sein. Wir wählen diese Null:

$$A_2 = 0.$$

Dann wird der Vektor $\mathfrak{z}$:

$$\mathfrak{z} = C\,a\,\mathfrak{B}_3.$$

Das besagt, daß die Schraubungsachsen alle in der durch die $\mathfrak{B}_1$-Achse gehenden Lotebene der Kurvenebene liegen. Für $\mathfrak{r}_v$ bekommen wir jetzt folgende Darstellung:

$$\mathfrak{r}_v = \mathfrak{B}_1'\,X_1 + \mathfrak{B}_2'\,X_2 + C\,a\,\mathfrak{B}_2 + a\,\mathfrak{B}_1.$$

Durch Integration erhält man hieraus:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{B}_1\,X_1 + \mathfrak{B}_2\,X_2 + \int_{v_0}^{v} C\,a\,\mathfrak{B}_2\,dv + \int_{v_0}^{v} a\,\mathfrak{B}_1\,dv.$$

Setzen wir jetzt

$$a = F'(v),$$

so wird, da

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{C},$$

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{C}\,\big(X_1 + F(v)\big) + \mathfrak{B}_2\,X_2 + \int_{v_0}^{v} C\,F'(v)\,\mathfrak{B}_2\,dv.$$

Nun setzen wir:

$$C\int F'(v)\,\mathfrak{B}_2\,dv = \mathfrak{R}\,(\bar{v})$$

und führen als Parameter $\bar{v}$ die Bogenlänge von $\mathfrak{R}$ ein, dann ist:

$$\frac{d\bar{v}}{dv} = C\,F'(v)$$

$$\bar{v} = C\,F(v)$$

$$\mathfrak{B}_2 = \frac{d\,\mathfrak{R}}{d\bar{v}} = \mathfrak{T}.$$

Unsere Flächendarstellung wird jetzt:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{C}\left(X_1 + \frac{\bar{v}}{C}\right) + \mathfrak{X} X_2 + \mathfrak{R} \tag{47}$$

$\mathfrak{R}$ ist dabei eine Kurve in einer zu $\mathfrak{C}$ senkrechten Ebene. Wir erkennen nun folgende Erzeugungsmöglichkeit dieser Flächen: Gegeben sei ein beliebiger Zylinder, dessen Leitlinie gegeben ist durch

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{R}(\bar{v})$$

und dessen Mantellinien parallel $\mathfrak{C}$ sind. Auf diesem Zylinder nehmen wir eine allgemeine Schraubenlinie an, die gegeben ist durch die Gleichung:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{R}(\bar{v}) + \mathfrak{C}\frac{\bar{v}}{C}.$$

Unsere Kurvenebene wird nun so bewegt, daß der Koordinatenanfangspunkt $0'$ sich auf der allgemeinen Schraubenlinie bewegt und die Ebene selbst den Zylinder längs der $\mathfrak{V}_1$-Achse berührt. Die Kurve $\mathfrak{y}(X_1, X_2)$ ist bestimmt durch die Differentialgleichung, die man aus (45) erhält:

$$C(\mathfrak{V}_2 \mathfrak{h}) - c_1^2 (\mathfrak{V}_2 \mathfrak{y}) + (\mathfrak{V}_1 \mathfrak{h}) = 0. \tag{48}$$

c)
$$c_1 \neq 0; \quad c_2 \neq 0.$$

Setzen wir hier

$$\mathfrak{S} = \alpha_1 \mathfrak{V}_1 + \alpha_2 \mathfrak{V}_2 + \alpha_3 \mathfrak{V}_3$$
$$\mathfrak{V}_3 = \mathfrak{h}$$

in die Gleichungen (27) und (28) ein, so kann man aus den 2 Gleichungen α_1 und α_2 berechnen und man erhält:

$$\alpha_1 = \sqrt{-a \operatorname{tg} V}\, \Phi_1(u)$$
$$\alpha_2 = \sqrt{-a \operatorname{tg} V}\, \Phi_2(u).$$

Da α_1 und α_2 Funktionen von v allein sind, müssen Φ_1 und Φ_2 Konstante sein. Daraus folgt, daß:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \text{const.}$$

Das besagt, daß $\mathfrak{S}$ parallel einer zur Kurvenebene senkrechten, festen Ebene liegt. Setzen wir fest, diese Ebene gehe durch die $\mathfrak{B}_1$ (X_1)-Achse, so können wir annehmen:

$$\mathfrak{S} = \sin\psi\,\mathfrak{B}_1 + \cos\psi\,\mathfrak{B}_3. \tag{49}$$

Setzt man (33) und (49) in (29) ein, so erhält man:

$$\cos\psi = -\sqrt{-a\,\mathrm{ctg}\,V}\,c_2$$

und hieraus:

$$\cos^2\psi = -a\,\mathrm{ctg}\,V\,c_2^2. \tag{50}$$

Aus (34) und (50) kann man nun $\mathrm{tg}\,V$ und a als Funktion von ψ berechnen und erhält:

$$\mathrm{tg}\,V = \pm\frac{c_2}{c_1}\,\mathrm{tg}\,\psi. \tag{51}$$

$$a = \mp\frac{\cos\psi\,\sin\psi}{c_1\,c_2}. \tag{52}$$

Setzen wir (49) in (12a) ein, so erhalten wir:

$$|\mathfrak{B}_3, \mathfrak{y}, \mathfrak{b}|\cos\psi\sin V + |\mathfrak{B}_1, \mathfrak{y}, \mathfrak{b}|\sin\psi\cos V + (\mathfrak{B}_4'\,\mathfrak{h})\sin V + (\mathfrak{B}_4'\,\mathfrak{b})\cos V = 0.$$

Dividieren wir diese Gleichung mit $\sin\psi\cos V$, setzen für $\mathrm{tg}\,V$ den Wert aus (51) ein und ersetzen noch $\mathfrak{B}_4'$ durch:

$$\mathfrak{B}_4' = a\,\mathfrak{B}_1 + a_2\,\mathfrak{B}_2 + a_3\,\mathfrak{B}_3,$$

so erhalten wir:

$$\pm\frac{c_2}{c_1}(\mathfrak{y}\,\mathfrak{t}) + (\mathfrak{y}\,\mathfrak{h}) \pm \frac{c_2}{c_1}(\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{h})\frac{a_1}{\cos\psi} \pm \frac{c_2}{c_1}(\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{h})\frac{a_2}{\cos\psi} + \frac{a_3}{\sin\psi} = 0.$$

Diese Gleichung muß erfüllt sein entweder für das positive oder negative Vorzeichen von $\frac{c_2}{c_1}$. Wir setzen deshalb

$$\pm\frac{c_2}{c_1} = c$$

und erhalten:

$$c(\mathfrak{y}\,\mathfrak{t}) + (\mathfrak{y}\,\mathfrak{h}) + c(\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{h})\frac{a_1}{\cos\psi} + c(\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{h})\frac{a_2}{\cos\psi} + \frac{a_3}{\sin\psi} = 0. \tag{53}$$

Nun setzen wir:

$$\frac{a_1}{\cos\psi} = V_1; \quad \frac{a_2}{\cos\psi} = V_2; \quad \frac{a_3}{\sin\psi} = V_3$$

und differenzieren (53) nach v. Dann erhalten wir:

$$c\,(\mathfrak{B}_1\mathfrak{h})\,V_1' + c\,(\mathfrak{B}_2\mathfrak{h})\,V_2' + V_3' = 0. \tag{54}$$

Wenn nicht die Gleichungen

$$V_1' = V_2' = V_3' = 0$$

erfüllt sind, stellt (54) eine Bedingung dar, daß $\mathfrak{h}$ auf einer Geraden in der Kurvenebene liegt. Da $\mathfrak{h}$ Einheitsvektor ist, würde hieraus folgen, daß $\mathfrak{h}$ ein konstanter Vektor ist. Unsere Kurve würde dann in eine Gerade ausarten. Davon wollen wir absehen. Wir können also annehmen:

$$\begin{aligned} V_1 &= C_1 \\ V_2 &= C_2 \\ V_3 &= C_3, \end{aligned}$$

wo C_1, C_2, C_3 konstante Zahlen bedeuten. Dann erhält man:

$$\begin{aligned} a_1 &= C_1 \cos\psi \\ a_2 &= C_2 \cos\psi \\ a_3 &= C_3 \sin\psi \end{aligned}$$

$$\mathfrak{B}_4' = C_1 \cos\psi\,\mathfrak{B}_1 + C_2 \cos\psi\,\mathfrak{B}_2 + C_3 \sin\psi\,\mathfrak{B}_3.$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_1' &= (\mathfrak{S}\times\mathfrak{B}_1) = \cos\psi\,\mathfrak{B}_2 \\ \mathfrak{B}_2' &= (\mathfrak{S}\times\mathfrak{B}_2) = \sin\psi\,\mathfrak{B}_3 - \cos\psi\,\mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{B}_3' &= (\mathfrak{S}\times\mathfrak{B}_3) = -\sin\psi\,\mathfrak{B}_2, \end{aligned}$$

deshalb wird $\mathfrak{B}_4'$

$$\mathfrak{B}_4' = C_2\mathfrak{B}_1' + C_3\mathfrak{B}_2' + (C_1 + C_3)\cos\psi\,\mathfrak{B}_1.$$

Durch Integration erhält man:

$$\mathfrak{B}_4 = C_2\mathfrak{B}_1 + C_3\mathfrak{B}_2 + \int_{v_0}^{v} C\mathfrak{B}_1 \cos\psi\; dv. \tag{55}$$

Nun führen wir statt des bisherigen Parameters v die Bogenlänge $\bar{v}$ der Kurve

$$\mathfrak{R}(\bar{v}) = \int_{v_0}^{v} C\,\mathfrak{B}_1 \cos\psi\, dv$$

ein. Die Tangente $\mathfrak{T}$ dieser Kurve ist $\mathfrak{B}_1$. Ferner gilt die Beziehung:

$$\frac{d\bar{v}}{dv} = C\cos\psi.$$

Für $\mathfrak{T}_{\bar{v}}$ erhält man dann:

$$\mathfrak{T}_{\bar{v}} = \mathfrak{B}_1' \frac{dv}{d\bar{v}} = \mathfrak{B}_2 \cos\psi \frac{1}{C\cos\psi} = \frac{\mathfrak{B}_2}{C}. \tag{56}$$

Vergleicht man (56) mit der 1. Frenet'schen Formel, so erkennt man, daß $\mathfrak{B}_2$ die Hauptnormale der Kurve $\mathfrak{R}(\bar{v})$ ist und $\frac{1}{C}$ deren Krümmung.

Unsere Flächendarstellung wird jetzt:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{R}(\bar{v}) + \mathfrak{T}(X_1 + C_2) + \mathfrak{H}(X_2 + C_3).$$

C_2 und C_3 können noch zu X_1 und X_2 genommen werden. Dann vereinfacht sich unsere Flächendarstellung:

$$\boxed{\mathfrak{r} = \mathfrak{R}(\bar{v}) + \mathfrak{T}\,X_1 + \mathfrak{H}\,X_2} \tag{57}$$

Dabei ist über die Kurve $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\bar{v})$ nur vorausgesetzt, daß sie konstante Krümmung $\frac{1}{C}$ hat. Die Differentialgleichung für die Kurve $\mathfrak{y}$ (Gl. 53) wird jetzt:

$$c(\mathfrak{y}\mathfrak{t}) + (\mathfrak{y}\mathfrak{h}) + c(\mathfrak{B}_1\mathfrak{h})\,C = 0. \tag{58}$$

Um unsere Fläche zu erzeugen, wird die Kurvenebene so bewegt, daß die $\mathfrak{B}_1$ (X_1)-Achse stets mit der Tangente, die $\mathfrak{B}_2$ (X_2)-Achse stets mit der Hauptnormale einer Kurve mit der konstanten Krümmung $\frac{1}{C}$ zusammenfällt.

III. $$a \neq 0; \quad \frac{1}{\tau} \neq 0.$$

In diesem Fall erhalten wir durch Dividieren und Wurzelziehen aus Gleichung (16):

$$\sqrt{a}\sqrt{\frac{-\sin\varphi\cos\varphi}{\rho\rho' - \frac{\rho^2 \operatorname{ctg}\varphi}{\tau}}} = \mathfrak{S}\mathfrak{h}\cos\varphi - \mathfrak{S}\mathfrak{b}\sin\varphi.$$

Wir setzen nun zur Abkürzung:

$$\sqrt{\frac{-\sin\varphi\cos\varphi}{\rho\rho' - \frac{\rho^2 \operatorname{ctg}\varphi}{\tau}}} = \Phi(u, v).$$

Dann erhalten wir:

(59) $$\sqrt{a}\,\Phi = \mathfrak{S}\mathfrak{h}\cos\varphi - \mathfrak{S}\mathfrak{b}\sin\varphi.$$

Nach einer Differentiation nach u erhält man hieraus:

(60) $$(\mathfrak{S}\mathfrak{t}) = -\sqrt{a}\,\frac{\Phi_u \rho}{\cos\varphi}.$$

Nach einer weiteren Differentiation nach u erhält man:

(61) $$(\mathfrak{S}\mathfrak{h}) = -\sqrt{a}\,\rho\,\frac{d}{du}\left(\frac{\Phi_u \rho}{\cos\varphi}\right).$$

Aus (59) und (61) erhält man jetzt:

(62) $$(\mathfrak{S}\mathfrak{b}) = -\sqrt{a}\left(\rho \operatorname{ctg}\varphi\,\frac{d}{du}\left(\frac{\Phi_u \rho}{\cos\varphi}\right) + \frac{\Phi}{\sin\varphi}\right).$$

Nun ist $\mathfrak{S}$ als Einheitsvektor vorausgesetzt. Folglich gilt:

$$\mathfrak{S}\mathfrak{t}^2 + \mathfrak{S}\mathfrak{h}^2 + \mathfrak{S}\mathfrak{b}^2 = 1.$$

Setzt man (60), (61), (62) in diese Beziehung ein, so erhält man nach einer Division mit a

(63) $$\frac{1}{a} = \left(\Phi_u \frac{\rho}{\cos\varphi}\right)^2 + \rho^2\left[\frac{d}{du}\left(\Phi_u \frac{\rho}{\cos\varphi}\right)\right]^2 + \left[\rho \operatorname{ctg}\varphi\,\frac{d}{du}\left(\Phi_u \frac{\rho}{\cos\varphi}\right) + \frac{\Phi}{\sin\varphi}\right]^2.$$

In Gleichung (63) kommt $\mathfrak{S}$ nicht mehr vor. Da $\frac{1}{a}$ eine Funktion von v allein ist, erhält man aus (63) durch Differentiation nach u eine Gleichung, in der nur mehr u und $\varphi = \int_{u_0}^{u} \frac{ds}{\tau} + V(v)$ vorkommt. Da diese Gleichung für $\frac{1}{\tau} \neq 0$ keine Identität ist, ist durch sie φ als Funktion von u bestimmt. Daraus folgt, daß $V(v)$ eine Konstante ist. Hieraus folgt wieder rückwärts, daß $\frac{1}{a}$ eine Funktion von u allein ist und infolgedessen ebenfalls eine Konstante ist. Nun lassen wir im folgenden auch $\frac{1}{\tau} = 0$ zu und setzen nur mehr voraus, daß a und $V(v)$ Konstante sind. Dann können wir nämlich gleich den bei II S. 23 zurückgestellten Fall $a = \text{const.}$, $V = \text{const.}$, $\frac{1}{\tau} = 0$ mitbehandeln.

Differenzieren wir (60), (61) und (62) im Koordinatensystem der Kurve $v = v_0$ nach v, so erhalten wir:

$$\mathfrak{S}'\mathfrak{t} = \mathfrak{S}'\mathfrak{h} = \mathfrak{S}'\mathfrak{b} = 0.$$

Hieraus erhält man:

$$\mathfrak{S}' = 0$$
$$\mathfrak{S} = \mathfrak{C}.$$

Die Schraubungsachse hat also konstante Richtung. In der Gleichung (12b) ist jetzt nur mehr $\mathfrak{z}$ von v abhängig. Differenzieren wir (12b) nach v, so erhalten wir:

$$(64) \qquad -|\mathfrak{C}, \mathfrak{z}_v, \mathfrak{h}| \sin\varphi - |\mathfrak{C}, \mathfrak{z}_v, \mathfrak{b}| \cos\varphi = 0.$$

Differenziert man (64) zweimal hintereinander nach u, so erhält man 2 Gleichungen, aus denen sich zusammen mit (64) ergibt:

$$|\mathfrak{C}, \mathfrak{z}_v, \mathfrak{t}| = |\mathfrak{C}, \mathfrak{z}_v, \mathfrak{h}| = \mathfrak{C}, \mathfrak{z}_v, \mathfrak{h}| = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\mathfrak{C} \times \mathfrak{z}_v = 0$$
$$\mathfrak{z}_v = \mathfrak{C}\,\Phi_v$$
$$\mathfrak{z} = \mathfrak{C}\Phi + \mathfrak{C}_1.$$

Da aber $\mathfrak{z}$ senkrecht $\mathfrak{S} = \mathfrak{C}$ angenommen wird, erhalten wir:

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{C}_1.$$

Die Schraubungsachse ist also nicht nur der Richtung, sondern auch der Lage nach konstant. Da auch die Verschraubung a konstant ist, handelt es sich hier um die allgemeinen Schraubenflächen. Die einzigen Flächen mit einer Schar nicht ebener kongruenter Krümmungslinien sind also die allgemeinen Schraubenflächen.

Das Ergebnis des II. Teils ist also: Außer den im I. Teil erhaltenen Flächen und den allgemeinen Schraubenflächen haben folgende Flächen kongruente Krümmungslinien:

1. Die Flächen, welche dargestellt werden durch (25). Diese werden durch einen Kreis erzeugt, dessen Mittelpunkt an einem Faden befestigt ist, welcher auf einer beliebigen Kurve abgewickelt wird. Dabei muß die Kreisebene stets senkrecht zum Faden stehen.

2. Die Flächen, welche dargestellt werden durch (39). Diese entstehen durch beliebige Verschraubung einer Kreisevolvente um eine Achse senkrecht zu ihrer Ebene, die durch den Kreismittelpunkt geht.

3. Die Flächen, welche dargestellt werden durch (47). Diese entstehen, wenn eine Ebene, auf der eine Kurve von einer durch die Differentialgleichung (48) bestimmten Form eingezeichnet ist, so bewegt wird, daß diese stets längs einer in ihr festen Geraden einen beliebigen Zylinder berührt und die Punkte dieser Geraden allgemeine Schraubenlinien auf dem Zylinder beschreiben.

4. Die Flächen, welche dargestellt werden durch (57). Diese entstehen dadurch, daß eine Ebene, auf der eine Kurve von einer durch die Differentialgleichung (58) bestimmten Form eingezeichnet ist, bei ihrer Bewegung stets Schmiegungsebene einer Raumkurve von konstanter Krümmung bleibt, und zwar eine feste Gerade in ihr Tangente und eine zweite ebenfalls feste und zur ersten senkrechte Gerade stets Hauptnormale dieser Kurve ist.

Lebenslauf

Ich, Maria Knoll, bin geboren am 10. August 1912 zu Nürnberg-Eibach als Tochter des Sattlers Michael Knoll und seiner Ehefrau Maria. Nach vierjährigem Besuch der Volksschule kam ich ans Lyzeum der Englischen Fräulein in Nürnberg. Ende der 5. Klasse des Lyzeums trat ich an das städtische Mädchenrealgymnasium Findelgasse über, das ich im März 1931 mit dem Reifezeugnis verließ. Das 1. Semester studierte ich in Wien, alle weiteren in Würzburg. Ende des Wintersemesters 1935/36 unterzog ich mich dem 1. Abschnitt der Lehramtsprüfung für Mathematik und Physik. Ich hörte die Vorlesungen und Übungen bei den Herren Professoren: Harms, Ott, Rost, Volk, v. Weber.

Allen meinen verehrten Lehrern erlaube ich mir an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank auszusprechen, insbesondere Herrn Professor Dr. Volk für die bei der Abfassung dieser Arbeit gewährte Anregung und Unterstützung.